

**INSTITUT UCAC-ICAM**  
Concours d'entrée- mai 2021

<b>A remplir par le candidat :</b>	<u>Cadre réservé à l'Institut</u>
Nom : ..... Prénom : .....	N° anonyme : .....
Centre de passage de l'examen : ..... N° de place : .....	
Epreuve de Mathématiques	

<u>Cadre réservé à l'Institut</u>	<input checked="" type="checkbox"/> 1 <sup>er</sup> cycle formation	<u>Cadre réservé à l'Institut</u>
Note :	<b><u>Epreuve de Mathématiques</u></b>	N° anonyme : .....

<u>1</u>	<p>1. La suite <math>(a_n)</math> est définie par <math>a_0 = 1</math> ou <math>a_1 = 1</math> et</p> $a_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) a_n$ $a_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) a_n$ <p>Pour tout entier naturel <math>n \geq 1</math>.</p> <p>L'expression de <math>a_n</math> en fonction de <math>n</math> est :</p>	<p>a) <math>a_n = \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots} \times \frac{1}{n} a_n = \frac{1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots} \times \frac{1}{n}</math></p> <p>b) <math>a_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n^2} a_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n^2}</math></p> <p>c) <math>a_n = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n} a_n = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n}</math></p> <p>d) <math>a_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!} a_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!}</math></p>
	<p>2. Pour tout entier naturel <math>n \geq 0</math>, <math>a_0 = 1</math>, on en déduit que la suite <math>(a_n)</math> est :</p>	<p>a) <i>Décroissante</i></p> <p>b) <i>Constante</i></p> <p>c) <i>Stationnaire</i></p> <p>d) <i>Croissante</i></p>
	<p>3. Sur un échiquier de 64 cases on place 100 pièces de 5F repartit de la manière suivante : sur la 1<sup>ère</sup> case on place une pièce de 5F, et sur chacune des autres cases on place deux pièces de plus que sur la précédente. Combien y a-t-il des pièces sur la dernière case ?</p>	<p>a) 6</p> <p>b) 18</p> <p>c) 21</p> <p>d) 17</p>
	<p>4. La somme des pièces de 5F placées dans la dernière case est :</p>	<p>a) 85</p> <p>b) 105</p> <p>c) 30</p> <p>d) 100</p>
	<p>5. Combien de pièces de 5F faut-il avoir pour remplir les 64 cases de l'échiquier ?</p>	<p>a) 5218</p> <p>b) 12364</p> <p>c) 16256</p> <p>d) 8128</p>

	6. Le montant total de ces pièces de 5F est de :	a) 81820 b) 81280 c) 40640 d) 26090
<u>2</u>	<p>1. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math> <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math>. <math>A, B, C</math> <math>A, B, C</math> sont 3 points du plan d'affixes respectives :  <math>a; -2 + 2i; 4i, a \in \mathbb{R}</math>  <math>a; -2 + 2i; 4i, a \in \mathbb{R}</math></p> <p>On trouve les formes trigonométriques des complexes</p>	<p>a) <math>Z_A = a(\cos k\pi + i\sin k\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_A = a(\cos k\pi + i\sin k\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_C = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right)</math></p> <p>b) <math>Z_A = a(\cos k2\pi + i\sin k2\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_A = a(\cos k2\pi + i\sin k2\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_C = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} - i\sin \frac{\pi}{2} \right)</math></p> <p>c) <math>Z_A = a(\cos k2\pi + i\sin k2\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_A = a(\cos k2\pi + i\sin k2\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_C = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right)</math></p> <p>d) <math>Z_A = a(\cos k\pi + i\sin k\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_A = a(\cos k\pi + i\sin k\pi); Z_B = 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4} \right);</math>  <math>Z_C = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right)</math></p>
	2. La valeur de $a$ pour laquelle le triangle ABC est rectangle et isocèle en A ou en B est :	a) $Z_A = 4i \quad Z_A = 4i$ b) $Z_A = 0 \quad Z_A = 0$ c) $Z_A = 2 \quad Z_A = 2$ d) $Z_A = \frac{1}{2} \quad Z_A = \frac{1}{2}$
	3. On suppose que $a = 0 \quad a = 0$ . L'image A' de A par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ est :	a) $Z_{A'} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}} \quad Z_{A'} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ b) $Z_{A'} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad Z_{A'} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ c) $Z_{A'} = \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}} \quad Z_{A'} = \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ d) $Z_{A'} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \quad Z_{A'} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

	<p>4. On suppose que <math>a = 2</math> <math>a = 2</math>. L'image <math>C'</math> de <math>C</math> par la translation de vecteur <math>\overrightarrow{BA}</math> est :</p>	<p>a) <math>Z_{C'} = -4 + 2i</math> <math>Z_{C'} = -4 + 2i</math>  b) <math>Z_{C'} = 2 + 2i</math> <math>Z_{C'} = 2 + 2i</math>  c) <math>Z_{C'} = -2 + 2i</math> <math>Z_{C'} = -2 + 2i</math>  d) <math>Z_{C'} = 4 + 2i</math> <math>Z_{C'} = 4 + 2i</math></p>
	<p>5. L'expression de la similitude directe qui transforme <math>A</math> en <math>C</math> puis <math>B</math> en <math>A</math> est :</p>	<p>a) <math>Z' = iZ + 2 - 2i</math> <math>Z' = iZ + 2 - 2i</math>  b) <math>Z' = (-1 + i)Z + 2i</math> <math>Z' = (-1 + i)Z + 2i</math>  c) <math>Z' = \sqrt{2}(-1 + i)Z + 4i</math>  <math>Z' = \sqrt{2}(-1 + i)Z + 4i</math>  d) <math>(1 + i)Z + 4i</math> <math>(1 + i)Z + 4i</math></p>
<p><u>3</u></p>	<p>1. Le système d'inconnues réelles strictement positifs <math>x</math> et <math>y</math></p> $\begin{cases} \ln x + 4 \ln y = 3 \\ 4 \ln x - 2 \ln y = 3 \end{cases}$ <p>a pour solution le couple <math>(x, y)</math> suivant</p>	<p>a) <math>(e^{-\frac{1}{2}}; e)</math>  b) <math>(1; \frac{1}{2})</math>  c) <math>(e^2; e)</math>  d) <math>(e; e^{\frac{1}{2}})</math></p>
	<p>2. L'étude du signe de la fonction suivante définie sur <math>]0; +\infty[</math>, par <math>f: x \mapsto \frac{1-2\ln x}{x^3}</math></p>	<p>a) <math>f</math> est croissante sur <math>]0; e^{\frac{1}{2}}[</math>, puis <math>f</math> est décroissante sur <math>[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[</math>  b) Pour tout <math>x \in ]0; +\infty[</math>, <math>f(x) \geq 0</math>  <math>x \in ]0; +\infty[</math>, <math>f(x) \geq 0</math>  c) <math>f(x) \geq 0</math> sur <math>]0; e^{\frac{1}{2}}[</math> et <math>f(x) \leq 0</math> sur <math>[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[</math>  d) <math>f</math> est décroissante sur <math>]0; e^{\frac{1}{2}}[</math>, puis <math>f</math> est croissante sur <math>[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[</math></p>
	<p>3. Le calcul de <math>\int_1^2 (x - \frac{x^3-1}{x}) dx</math></p>	<p>a) <math>-\frac{5}{6} + \ln 2 - \frac{5}{6} + \ln 2</math>  b) <math>\frac{11}{8} + \ln 2</math>  c) <math>\ln 3 - \frac{1}{3}</math>  d) <math>\ln 2 - 3</math></p>

	<p>4. La dérivée de la fonction <math>f</math> définie par : <math>f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{3x+9}</math></p>	<p>a) <math>f'(x) = \frac{6x-6\sqrt{x}-9}{2\sqrt{x}(3x+9)^2}</math></p> <p>b) <math>f'(x) = \frac{6x-12\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(3x+9)^2}</math></p> <p>c) <math>f'(x) = \frac{6x-12x\sqrt{x}-9}{2\sqrt{x}(3x+9)^2}</math></p> <p>d) <math>f'(x) = \frac{6x-6x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(3x+9)^2}</math></p>
--	--	---

	<p>5. Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>]-2; +\infty[</math> par : <math>f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 8}{x + 2}</math></p> <p>La limite de <math>f(x)</math> en <math>-2</math> est :</p>	<p>a) <math>+\infty</math></p> <p>b) <math>-\infty</math></p> <p>c) <i>N'existe pas</i></p> <p>d) La question n'est pas précise.</p>
--	---	--

<p><u>4</u></p>	<p>1. Soit <math>f</math> la fonction définie par : <math>f(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x^2}</math> et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal <math>(O; \vec{i}, \vec{j})</math></p> <p>L'ensemble de définition de <math>f</math> est :</p>	<p>a) <math>\mathbb{R}</math></p> <p>b) <math>\mathbb{R}^*</math></p> <p>c) <math>\mathbb{R}_+^*</math></p> <p>d) <math>\mathbb{R}_-^*</math></p>
	<p>2. L'étude du signe de la fonction suivante définie sur <math>]-\infty; 0[</math>, le calcul des limites donne :</p>	<p>a) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty</math> et <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty</math></p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty</math> et <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty</math></p> <p>c) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty</math> et <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty</math></p> <p>d) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty</math> et <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty</math></p>

<p>3. Le calcul de <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math>  <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math>, on peut conclure que :</p>	<p>a) La courbe (C) (C) de <math>f</math> admet une branche parabolique de direction (oy).</p> <p>b) La courbe (C) (C) de <math>f</math> admet une asymptote ; la droite <math>y = x</math>.</p> <p>c) La courbe (C) (C) de <math>f</math> admet une asymptote ; la droite <math>y = -x</math>.</p> <p>d) La courbe (C) (C) de <math>f</math> admet une branche parabolique de direction (ox).</p>
<p>4. On considère la dérivée de la fonction <math>f</math> sur l'intervalle <math>] -\infty ; 0[</math>  <math>f'(x) = e^{-x} + \frac{2}{x^3}</math>  <math>f'(x) = e^{-x} + \frac{2}{x^3}</math></p>	<p>a) Il existe <math>\alpha \in \mathbb{R}</math> tel que : <math>f'(\alpha) = 0</math></p> <p>b) Pour tout <math>x &lt; 0</math>, <math>f'(x) &gt; 0</math></p> <p>c) Pour tout <math>x &lt; 0</math>, <math>f'(x) &lt; 0</math></p> <p>d) On ne peut conclure.</p>